Les combinaisons.

Lycée Franco-Mexicain
TS3

1 Définiton

Un exemple :

On pioche 4 boules dans une urne qui en contient 7 . Ce qui sous-entend que l'on ne tient pas compte de l'ordre.

Un résultat peut être désignée par une partie à 4 éléments de l'ensemble de 7 boules, par exemple :

$$\{3, 1, 2, 7\}$$

Une telle partie est appelée combinaisons de 4 éléments pris parmi 7

Pour dénombrer ces tirages on va utiliser con connaissances sur les tirages ordonnés.

* Si on tient compte de l'ordre, les tirages parmi 7 sont :

$$7 \times 6 \times 5 \times 4$$

* Sachant que j'ai obtenu les boules numérotées $3, 1, 2, 7$ Combien a-t-on de tirages ordonnés avec ces 4 boules ?
* Conclusion : si on ne tient pas compte de l'ordre, on en déduit le nombre de poignées de 4 boules prises parmi 7 :

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{3!\ 4!}$$

Formule générale :

Soit E un ensemble fini de n éléments.

Choisir simultanément p éléments parmi n c'est réaliser une combinaison de p parmi n.

Le nombre de combinaisons est noté $\binom{n}{p}$ et :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}$$

Remarque :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2 Propriétés :

2.1 Premières propriétés :

1. $$\binom{n}{0} = 1$$
   car ne prendre aucun élément parmi n c'est $\emptyset$

2. $$\binom{n}{n} = 1$$
   car c'est E

3. $$\binom{n}{1} = n$$
   car prendre 1 élément parmi n c'est considérer tous les singletons possibles.

4. $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{pour } 0 \leq p \leq n$$
   Le fait d'associer à chaque partie A (ayant p éléments) son complémentaire $\bar{A}$ (ayant $n-p$ éléments) justifie cette égalité.

2.2 Propriétés des $\binom{n}{p}$

Théorème 2.1 (Relation de Pascal)**.** *Pour tous les entiers n et p vérifiant : $1 \leq p \leq n-1$ on a :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration 2.1. *Soit E un ensemble à n éléments fixé de E. On effectue une partition de E ayant p éléments :*

* *Celles qui contiennent a : ce sont les parties à $p-1$ éléments pris parmi $n-1$ (car il faut enlever a).*
  Donc il y en a :

$$\binom{n-1}{p-1}$$

* *Celles qui ne contiennent pas a. Ce sont les parties à p éléments pris parmi $n-1$ éléments.*
  Il y en a :

$$\binom{n-1}{p}$$

* *Conclusion : La partition de l'ensemble des parties à p éléments parmi n donc :*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

On représente cette propriété par le Le triangle de Pascal :

Les $\binom{n}{p}$ sont appelés *Coefficients binomiaux*

2.3 Formule du binôme de Newton

Théorème 2.2. *Soit a et b deux nombres complexes et $n \geq 1$ on a :*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p\end{aligned}$$