TS3	DEVOIR SURVEILLÉ N°5	20/01/2010

<u>Exercice 1</u> (4 points)

Une urne contient 7 boules : 5 noires numérotées de 1 à 5, et 2 rouges, numérotées 6 et 7.

A. On extrait successivement et sans remise 5 boules.
   1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   2. Déterminer le nombre de tirages tels que :
   a) La première boule tirée est rouge.
   b) La première boule tirée est noire et la deuxième est rouge.
   c) La somme des numéros des deux premières boules tirées est supérieure ou égale à 10.
B. On extrait successivement et avec remise 5 boules.
   1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   2. Déterminer le nombre de tirages tels que :
   a) Les deux premières boules tirées sont rouges.
   b) Les 5 boules tirées sont noires.
   c) La somme des numéros des deux premières boules tirées est supérieure ou égale à 10.
C. On extrait simultanément 5 boules de l'urne.
   Déterminer le nombre de tirages possibles.

Exercice 2 (5 points)

On considère l'équation différentielle (E): $y'-2y=-x^2e^x$

1. Déterminer une solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$, où a, b ,et c sont des réels.
2. Résoudre l'équation différentielle (E'): $y'-2y=0$
3. Démontrer que $u-g$ est solution de (E') équivaut à u est solution de (E).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer f la solution de (E) telle que $f(0)=0$.

<u>Exercice 3</u> (11 points)

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) $e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

Partie A- Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $f(x) = 0$.
2. **Étude du signe de la fonction** f

   a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

   c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

   d) Étudier le signe de f sur l'intervalle [0; α].

Partie B- Deuxième aproche

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0;1] par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est equivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle [0; α].

Partie C- Construction d'une suite de réels ayant pour limite α .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, que: $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.