

# Calcul Intégral

Lycée Franco-Mexicain  
TS3

## 1 Notion d'intégrale

### 1.1 Aire d'un domaine associé à une fonction positive

On appelle **domaine associé à une fonction  $f$  positive sur  $[a; b]$**  le domaine  $\xi$  délimité par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

Autrement dit :  $M(x; y) \in \xi \Leftrightarrow a \leq x \leq b$  et  $0 \leq y \leq f(x)$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , l'**unité d'aire** (noté **u.a**) et l'aire du rectangle bâti à partir des segments de  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### 1.2 Intégration d'une fonction continue positive

**Définition 1.1.** Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$  ( $a \leq b$ ). On appelle **intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$**  l'aire du domaine associé à  $f$  sur  $[a; b]$ , exprimé en u.a. Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t) dt$$

@ Les réels  $a$  et  $b$  sont les **bornes de l'intégrale**.

@  $dt$  est la **variable muette**, on la note  $dx, dt, \dots$

### 1.3 Extensions aux fonctions de signes quelconques

**Définition 1.2.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  ( $a \leq b$ ). On appelle **intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$**  le nombre ainsi défini :

\* Si  $f$  est négative sur  $[a; b]$ .

$$\int_a^b f(t) dt = -\text{Aire}(E)$$

\* Si  $f$  est de signe quelconque :

$$\int_a^b f(t) dt = \text{Aire}(E_1) - \text{Aire}(E_2) + \text{Aire}(E_3)$$

## 2 Propriétés de l'intégrale

### 2.1 Théorème fondamental du calcul intégral.

**Théorème 2.1.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  ( $a \leq b$ ).

Alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$  où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$

**Démonstration 2.1.** On suppose que  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel  $x \in [a; b]$  on note  $\mathcal{A}(x)$  l'aire du domaine associé à  $f$  sur  $[0; x]$

• Pour  $h \in \mathbb{R}^+$  on a :

$$\begin{aligned} hf(x) &\leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq hf(x+h) \\ f(x) &\leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h) \end{aligned}$$

• Pour  $h \in \mathbb{R}^-$  :

$$\begin{aligned} -hf(x) &\leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq -hf(x) \\ f(x+h) &\leq \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h)}{h} \leq f(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc,

\*  $\mathcal{A}$  est dérivable sur  $[a; b]$  et sa dérivée est  $f$  ( $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ )  
 $\mathcal{A}$  est une primitive de  $f$ , de plus  $\mathcal{A}(a) = 0$  donc  $\mathcal{A}$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

Donc si  $F$  est une primitive quelconque de  $f$ , on a :

$$\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a) \quad (1)$$

L'aire sous la courbe de la fonction  $f$  est donc bien

$$\int_a^b f(t) dt = \mathcal{A}(b) = F(b) - F(a) \quad \text{d'après (1)}$$

■

## 2.2 Primitive.

**Définition 2.1.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Pour tout  $x \in I$ , la fonction définie par :  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$

Autrement dit : si  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  alors :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

## 2.3 Propriétés algébriques de l'intégrale.

**Théorème 2.2.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors :

1. Pour tout réel  $a \in I$  :  $\int_a^a f(t) dt = 0$

2. **Relation de Chasles** :  $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$

3. **Linéarité de l'intégrale** : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$  contenant  $a$  et  $b$ . Alors pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

4.  $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$

### Propriétés :

1. **Parité** : Soit  $I$  un intervalle centré en 0, et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Pour tout réel  $a \in I$ ,

a) Si  $f$  est **paire** :  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

b) Si  $f$  est **impaire** :  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

2. **Periodicité** : Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , périodique de période  $T$ . Alors pour tout réel  $a$  :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$