Calcul Intégral

Lycée Franco-Mexicain
TS3

1 Notion d'intégrale

1.1 Aire d'un domaine associé à une fonction positive

On appelle domaine associé à une fonction f positive sur $[a;b]$ le domaine ξ délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Autrement dit : $M(x;y) \in \xi \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, l'unité d'aire (noté $u.a$ et l'aire du rectangle bâti à partir des segments de $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1.2 Intégration d'une fonction continue positive

Définition 1.1. *Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ $(a \leq b)$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f l'aire du domaine associé à f sur $[a;b]$, exprimé en u.a. Ce nombre est noté :*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt}$$

- @ *Les réels a et b sont les **bornes de l'intégrale**.*
- @ *dt est la **variable muette** , on la note $dx, dt, \ldots$*

1.3 Extensions aux fonctions de signes quelconques

Définition 1.2. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ $\quad (a \leq b)$. On appelle intégrale de a à b de f le nombre ainsi défini :*

** Si f est négative sur $[a;b]$.*

$$\int_a^b f(t)\,dt = -Aire(E)$$

** Si f est de signe quelconque :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = Aire(E_1) - Aire(E_2) + Aire(E_3)$$

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Théorème fondamental du calcul intégral.

Théorème 2.1. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ $\quad (a \leq b)$.*

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$

Démonstration 2.1. *On suppose que f est croissante sur $[a;b]$.*
Pour tout réel $x \in [a;b]$ on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine associé à f sur $[0;x]$

•Pour $h \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\begin{array}{rcl} hf(x) & \leq & \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \;\leq\; hf(x+h) \\ f(x) & \leq & \dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \;\leq\; f(x+h) \end{array}$$

•Pour $h \in R^-$:

$$\begin{array}{rcl} -hf(x) & \leq & \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq -hf(x) \\ f(x+h) & \leq & \dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x) \end{array}$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc,

** $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a;b]$ est sa derivée est f $\quad \big(\mathcal{A}'(x) = f(x)\big)$*
$\mathcal{A}$ est une primitive de f, de plus $\mathcal{A}(a) = 0$ donc $\mathcal{A}$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Donc si F est une primitive quelconque de f , on a :

$$\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a) \tag{1}$$

L'aire sous la courbe de la fonction f est donc bien

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathcal{A}(b) = F(b) - F(a) \quad \text{d'après (1)}$$

■

2.2 Primitive.

Définition 2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, la fonction définie par : $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a*

Autrement dit : si F est une primitive quelconque de f alors :

$$\boxed{\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)}$$

2.3 Propriétés algébriques de l'intégrale.

Théorème 2.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors :*

1. *Pour tout réel $a \in I$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$*
2. ***Relation de Chasles :*** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$
3. ***Linéarité de l'intégrale :*** *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I contenant a et b. Alors pour tous réels α et β :*

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

4. $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Propriétés :

1. **Parité :** Soit I un intervalle centré en 0, et f une fonction continue sur I. Pour tout réel $a \in I$,

a) Si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

b) Si f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

2. **Periodicité :** Si f est continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. Alors pour tour réel a :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$$

3 Intégrales et inégalités

3.1 Valeur moyenne d'une fonction continue positive

Définition 3.1. *Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I contenant les réels a et b avec $a \leq b$. O appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$, le réel μ défini par :*

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

Interprétation graphique

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \\ \Leftrightarrow \mu(b-a) &= \int_{a}^{b} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Or $\mu(b-a)$ représente l'aire d'un rectangle de dimensions μ et $b-a$.La valeur moyenne est donc le réel μ pour lequel les zones vert et rouge ont même aire.

3.2 Intégrales et inégalités

Théorème 3.1. *Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, $a \leq b$*

Positivité : *Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors* $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$

Ordre : *Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors* $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

Inégalité de la moyenne :

- *Si pour tout* $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ *où* m *et* M *sont des réels,*

  alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
- *Si pour tout* $x \in [a;b]$, $|f(x)| \leq M$, *alors* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$

4 Intégration par parties

Théorème 4.1. *Soit* u *et* v *deux fonctions dérivables sur* $[a;b]$ *telles que* u' *et* v' *soient continues, alors :*

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)\cdot v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt}$$

Démonstration 4.1.

Comme $(uv)' = u'v + uv'$

On a : u'v=(uv)'-uv'. On intégre entre a et b :

$$\begin{aligned}\int_a^b (u'v)(t)\,dt &= \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b (uv')(t)\,dt \\ &= \Big[u\cdot v\Big]_a^b - \int_a^b (uv)'(t)\,dt\end{aligned}$$

■