# Calcul Intégral

**Lycée Franco-Mexicain**
TS3

## 1 Notion d'intégrale

### 1.1 Aire d'un domaine associé à une fonction positive

On appelle domaine associé à une fonction $f$ positive sur $[a; b]$ le domaine $\xi$ délimité par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Autrement dit : $M(x; y) \in \xi \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, l'unité d'aire (noté $u.a$ et l'aire du rectangle bâti à partir des segments de $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

### 1.2 Intégration d'une fonction continue positive

**Définition 1.1.** *Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a; b]$ $(a \leq b)$. On appelle intégrale de $a$ à $b$ de la fonction $f$ l'aire du domaine associé à $f$ sur $[a; b]$, exprimé en u.a. Ce nombre est noté :*

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

- *Les réels $a$ et $b$ sont les* ***bornes de l'intégrale****.*
- *$dt$ est la* ***variable muette*** *, on la note $dx, dt, \ldots$*

### 1.3 Extensions aux fonctions de signes quelconques

**Définition 1.2.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a; b]$ $\quad (a \leq b)$. On appelle intégrale de $a$ à $b$ de $f$ le nombre ainsi défini :*

* *Si $f$ est négative sur $[a; b]$.*

$$\int_a^b f(t)\, dt = -Aire(E)$$

$*$ *Si $f$ est de signe quelconque :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = Aire(E_1) - Aire(E_2) + Aire(E_3)$$

# 2 Propriétés de l'intégrale

## 2.1 Théorème fondamental du calcul intégral.

**Théorème 2.1.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$ $\quad (a \leq b)$.*

*Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ où $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$*

**Démonstration 2.1.** *On suppose que $f$ est croissante sur $[a;b]$.*
*Pour tout réel $x \in [a;b]$ on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine associé à $f$ sur $[0;x]$*

$\bullet$*Pour $h \in \mathbb{R}^+$ on a :*

$$\begin{array}{rcccl} hf(x) & \leq & \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) & \leq & hf(x+h) \\ f(x) & \leq & \dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} & \leq & f(x+h) \end{array}$$

$\bullet$*Pour $h \in R^-$ :*

$$\begin{array}{rcl} -hf(x) & \leq & \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq -hf(x) \\ f(x+h) & \leq & \dfrac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x) \end{array}$$

*D'après le théorème des gendarmes :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

*Donc,*

$*$ *$\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a;b]$ est sa derivée est $f$ $\quad \big(\mathcal{A}'(x) = f(x)\big)$*
*$\mathcal{A}$ est une primitive de $f$, de plus $\mathcal{A}(a) = 0$ donc $\mathcal{A}$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

*Donc si $F$ est une primitive quelconque de $f$ , on a :*

$$\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a) \tag{1}$$

*L'aire sous la courbe de la fonction $f$ est donc bien*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathcal{A}(b) = F(b) - F(a) \quad \textit{d'après (1)}$$

■